ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN QUANG VINH

DÃY SỐ JACOBSTHAL VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên, 11/2019

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

NGUYỄN QUANG VINH

DÃY SỐ JACOBSTHAL VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Chuyên ngành: **Phương pháp toán sơ cấp**
Mã số: **8 46 01 13**

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
TS. NGÔ VĂN ĐỊNH

Thái Nguyên, 11/2019

Mục lục

Mở đầu

Dãy số Jacobsthal $\{J_n\}$ và dãy số Jacobsthal–Lucas $\{j_n\}$ lần lượt được xác định bởi các công thức truy hồi:

$$J_0 = 0, \quad J_1 = 1, \quad J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}, \quad \text{với } n \geqslant 2$$

và

$$j_0 = 2, \quad j_1 = 1, \quad j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2}, \quad \text{với } n \geqslant 2.$$

Khái niệm về hai dãy số này lần đầu tiên được giới thiệu bởi Horadam [3] năm 1988. Sau đó, hai dãy số này được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Năm 1996, Horadam [4] đã công bố thêm một số kết quả về hai dãy số này.

Gần đây, năm 2007, Čerin [2] đã công bố một số kết quả nghiên cứu về tổng bình phương của các số Jacobsthal và về tổng các tích của hai số Jacobsthal liên tiếp. Đây là những kết quả khá thú vị về dãy số Jacobsthal.

Vừa rồi, năm 2018, Aydin [1] đã công bố một số nghiên cứu về việc mở rộng dãy số Jacobsthal. Đầu tiên, ta thấy rằng dãy số Jacobsthal và dãy số Jacobsthal–Lucas có chung công thức truy hồi và chỉ khác nhau về điều kiện ban đầu. Từ hai dãy số này, Aydin đã định nghĩa dãy số Jacobsthal suy rộng $\{\mathbb{J}_n\}$ bằng cách cho điều kiện ban đầu tùy ý. Cụ thể, dãy số Jacobsthal suy rộng được xác định bởi

$$\mathbb{J}_0 = q, \mathbb{J}_1 = p + q, \mathbb{J}_n = \mathbb{J}_{n-1} + 2\mathbb{J}_{n-2}, \text{ với } n \geq 2,$$

trong đó, p, q là hai số nguyên tùy ý. Bên cạnh đó, Aydin còn định nghĩa dãy số Jacobsthal suy rộng phức $\{\mathbb{C}_n\}$ và một số đối tượng khác cũng là các mở rộng từ dãy số Jacobsthal.

Mục đích của luận văn là nghiên cứu và trình bày lại một số kết quả nói trên về dãy số Jacobsthal, dãy số Jacobsthal–Lucas và các vấn đề liên quan. Cụ thể, trong Chương 1, chúng tôi trình bày khái niệm và một số tính chất cơ bản của dãy số Jacobsthal và dãy số Jacobsthal–Lucas dựa theo hai bài báo [3] và [4] của Horadam. Chương 2 trình bày lại các kết quả của Čerin về tổng bình phương và tích của các số Jacobsthal. Chương 3 trình bày về khái niệm và một số tính chất của dãy Jacobsthal suy rộng và dãy Jacobsthal suy rộng phức dựa theo bài bái của Aydin [1].

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên dưới sự hướng dẫn của TS. Ngô Văn Định. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc nhất tới TS. Ngô Văn Định, người đã định hướng chọn đề tài và tận tình hướng dẫn để tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới Phòng Đào tạo, các thầy cô giáo dạy cao học chuyên ngành Phương pháp toán sơ cấp, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thành luận văn tốt nghiệp.

Xin cảm ơn những người thân trong gia đình và tất cả những người bạn thân yêu đã hết sức thông cảm, chia sẻ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi để tôi có thể học tập, nghiên cứu và thực hiện luận văn của mình.

Thái Nguyên, tháng 11 năm 2019

Người viết luận văn

Nguyễn Quang Vinh

Chương 1

Dãy số Jacobsthal

Mục đích của chương này là trình bày lại khái niệm về dãy số Jacobsthal và dãy số Jacobsthal - Lucas. Đồng thời chúng tôi trình bày chứng minh các công thức số hạng tổng quát, công thức Simson và một số tính chất thú vị của hai dãy số này. Đặc biệt, chúng tôi trình bày về một số tính chất của hai dãy số tổng riêng của các số hạng đầu tiên của hai dãy số đó. Các nội dung này được tham khảo trong hai bài báo [3] và [4]. Trước đó, chúng tôi trình bày sơ lược về lý thuyết phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất để làm cơ sở cho việc trình bày về hai dãy số nói trên. Nội dung này chúng tôi tham khảo trong cuốn sách [5].

1.1 Dãy số Jacobsthal và dãy số Jacobsthal–Lucas

Trong mục này, chúng tôi trình bày khái niệm của dãy số Jacobsthal và dãy số Jacobsthal–Lucas và công thức tổng quát của hai dãy số này. Thực chất hai dãy số này chính là nghiệm của một phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất với điều kiện ban đầu khác nhau. Chính vì vậy, trước tiên, chúng tôi nhắc lại khái niệm về phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất và đặc biệt chúng tôi trình bày về công thức nghiệm của phương trình này trong trường hợp đa thức đặc trưng có hai nghiệm phân biệt.

Định nghĩa 1.1.1. Phương trình có dạng

$$u_{n+1} = Au_n + Bu_{n-1}, n = 1, 2, ..., \tag{1.1}$$

trong đó A, B là các hằng số, được gọi là *phương trình sai phân tuyến tính cấp hai thuần nhất.*

Để tìm nghiệm của phương trình sai phân (1.1), chúng ta xét phương trình bậc hai

$$\lambda^2 - A\lambda - B = 0. \tag{1.2}$$

Phương trình bậc hai này được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình sai phân (1.1). Định lý sau đây cho chúng ta công thức nghiệm của phương trình sai phân (1.1) trong trường hợp phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt.

Định lý 1.1.2 ([5, Định lý 10.1])**.** *Giả sử phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt α và β. Khi đó phương trình sai phân (1.1) có nghiệm là*

$$u_n = C_1\alpha^n + C_2\beta^n, n = 0, 1, 2, ..., \tag{1.3}$$

trong đó C_1 và C_2 là những số bất kì.

Chúng ta cũng cần chú ý rằng, nếu biết điều kiện ban đầu u_0 và u_1 thì các hằng số C_1 và C_2 hoàn toàn được xác định.

Ví dụ 1.1.3. Tìm nghiệm của phương trình sai phân

$$u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1} \tag{1.4}$$

với điều kiện ban đầu $u_0 = 0, u_1 = -1$.

Giải. Phương trình đặc trưng của phương trình (1.4) là

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm phân biệt là 2 và 3. Do đó, nghiệm tổng quát của phương trình (1.4) là

$$u_n = C_1 2^n + C_2 3^n, n = 0, 1, ...$$

Từ điều kiện ban đầu $u_0 = 0, u_1 = -1$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0, \\ 2C_1 + 3C_2 = -1. \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta được $C_1 = 1, C_2 = -1$. Vậy nghiệm của phương trình (1.4) với điều kiện ban đầu $u_0 = 0, u_1 = -1$ là

$$u_n = 2^n - 3^n, n = 0, 1, ...$$

□

Một cách tổng quát, trong trường hợp phương trình đặc trưng (1.2) có hai nghiệm phân biệt α và β, phương trình sai phân (1.1) cùng với điều kiện ban đầu u_0, u_1 xác định một dãy số $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ với

$$u_n = \frac{a\alpha^n - b\beta^n}{\alpha - \beta},$$

trong đó $a = u_1 - u_0\beta, b = u_1 - u_0\alpha$.

Bây giờ, chúng ta sẽ nghiên cứu khái niệm của dãy số Jacobsthal và dãy số Jacobsthal–Lucas dựa trên lý thuyết chung về phương trình sai phân như trên.

Định nghĩa 1.1.4. a) *Dãy số Jacobsthal* $\{J_n\}$ được xác định bởi

$$J_0 = 0, J_1 = 1 \text{ và } J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n, \text{ với } n \geq 0. \tag{1.5}$$

b) *Dãy số Jacobsthal–Lucas* $\{j_n\}$ được xác định bởi

$$j_0 = 2, j_1 = 1 \text{ và } j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n, \text{ với } n \geq 0. \tag{1.6}$$

Từ công thức (1.5) and (1.6) ta có bảng các số hạng đầu tiên của các dãy số J_n và j_n như sau:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$
J_n	0	1	1	3	5	11	21	43	85	171	341	$\cdots$
j_n	2	1	5	7	17	31	65	127	257	511	1025	$\cdots$

Từ các công thức (1.5) và (1.6) ta dễ dàng thấy rằng, với $n \geq 1$, tất cả các giá trị của J_n và j_n đều là số lẻ. Đây một đặc trưng đầu tiên của hai dãy số này.

Từ định nghĩa của dãy số Jacobsthal và dãy số Jacobsthal–Lucas, ta thấy rằng, cả hai dãy số này đều được xác định bởi cùng một phương trình sai phân nhưng khác nhau về điều kiện ban đầu. Phương trình sai phân xác định hai dãy số đó có phương trình đặc trưng là

$$x^2 - x - 2 = 0.$$

Phương trình đặc trưng này có hai nghiệm phân biệt $\alpha = 2, \beta = -1$. Do vậy, theo Định lý 1.1.2 cả hai dãy có số hạng tổng quát dạng

$$C_1 2^n + C_2(-1)^n, n = 0, 1, 2, ...$$

Với điều kiện ban đầu $J_0 = 0$ và $J_1 = 1$ ta tìm được $C_1 = \frac{1}{3}, C_2 = \frac{-1}{3}$. Do đó công thức tổng quát cho J_n là

$$J_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{3} = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right), \text{ với } n \geq 0.$$

Tương tự, với điều kiện ban đầu $j_0 = 2$ và $j_1 = 1$ ta thu được $C_1 = C_2 = 1$. Do đó, công thức tổng quát cho j_n là

$$j_n = \alpha^n + \beta^n = 2^n + (-1)^n, \text{ với } n \geq 0.$$

Hai công thức tổng quát này còn lần lượt được gọi là công thức Binet cho dãy Jacobsthal và công thức Binet cho dãy Jacobsthal–Lucas. Do vậy, ta có mệnh đề sau đây:

Mệnh đề 1.1.5 (Công thức Binet)**.** *Với số nguyên $n \geq 0$, ta có*

$$J_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right) \text{ và } j_n = 2^n + (-1)^n.$$

1.2 Một số tính chất cơ bản

Ở mục trước ta đã có định nghĩa và công thức Binet xác định số hạng tổng quát của hai dãy số J_n và j_n. Trong mục này chúng tôi trình bày một số tính chất cơ bản của hai dãy số này. Trước tiên là công thức Simson cho hai dãy số này.

Mệnh đề 1.2.1 (Công thức Simson)**.** *Với mọi số nguyên $n \geq 1$, ta có*

$$J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 = (-1)^n 2^{n-1}$$

và

$$j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^{n-1}2^{n-1} = -9\left(J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2\right).$$

Chứng minh. Theo công thức Binet, ta có $J_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right)$. Suy ra

$$\begin{aligned}
J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2 &= \frac{1}{9}\left(2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right)\left(2^{n-1} - (-1)^{n-1}\right) - \frac{1}{9}\left(2^n - (-1)^n\right)^2 \\
&= \frac{1}{9}\left[\left(2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right)\left(2^{n-1} - (-1)^{n-1}\right) - \left(2^n - (-1)^n\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{9}\left(2^{2n} - (-1)^{n-1}2^{n+1} - (-1)^{n+1}2^{n-1} + 1 - 2^{2n} + (-1)^n 2^{n+1} - 1\right) \\
&= \frac{1}{9}(-1)^n 2^{n-1}\left(2^3 + 1\right) = (-1)^n 2^{n-1}.
\end{aligned}$$

Tương tự, sử dụng công thức Binet cho dãy số Jacobsthal–Lucas ta chứng minh được

$$j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = (-1)^{n-1}2^{n-1}.$$

Suy ra $j_{n+1}j_{n-1} - j_n^2 = -9\left(J_{n+1}J_{n-1} - J_n^2\right)$. □

Mệnh đề sau đây cho ta tổng của các số hạng đầu của dãy số Jacobsthal và của dãy số Jacobsthal–Lucas.

Mệnh đề 1.2.2. *a) Với $n \geq 2$, ta có*

$$\sum_{i=2}^{n} J_i = \frac{J_{n+2} - 3}{2}. \tag{1.7}$$